

LA FONCTION AFFINE

I- Généralité :

Un service Minitel indique la tarification suivante : 0,02 € à la connexion, puis 0,20 € par minute.

Quel est le prix payé en fonction du nombre de minutes de connexion ?

Un cinéma propose une formule comprenant une carte d'abonnement de 22 € pour un an, puis 6 € par séance.

Quel est le prix payé en fonction du nombre de séances ?

Ces deux exemples correspondent à ce que l'on appelle des **fonctions affines**.

Exemple 1 :

Reprenons le premier exemple cité en introduction (tarification Minitel) et considérons le tableau ci-dessous donnant le prix payé en fonction de certains nombres de minutes de connexion, choisis arbitrairement :

| | | | | | | | |
|--------------------------------|------|------|------|------|------|------|------|
| Nombre de minutes de connexion | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| Prix à payer (en €) | 0,02 | 0,22 | 0,42 | 0,62 | 0,82 | 1,02 | 1,22 |

Pour calculer le prix payé (en €), il faut **multiplier** le nombre de minutes de connexion par 0,20 puis **ajouter** 0,02.

Si on appelle x le nombre de minutes de connexion, le prix payé (en €) sera donc égal à : $0,20x + 0,02$.

Par conséquent, la fonction qui au nombre x de minutes de connexion fait correspondre le prix payé

est : $x \rightarrow 0,20x + 0,02$.

Les fonctions de ce type sont appelées **fonctions affines**.

1- Définition :

Soit a et b deux nombres fixés ; la fonction qui à un nombre x fait correspondre le nombre $ax + b$ est appelée fonction affine ; cette fonction est notée : $x \longmapsto 2x + 5$.

Ainsi, la fonction $x \longmapsto 2x + 5$ est une fonction affine.

Reprenons l'exemple de l'abonnement au cinéma, cité en introduction, et appelons x le nombre de séances auxquelles on assiste dans l'année. Le prix annuel est égal à : $25x + 150$.

Par conséquent, la fonction qui au nombre x de séances annuelles fait correspondre le prix annuel payé est la fonction affine : $x \longmapsto 25x + 150$.

Cas particuliers :

si $b = 0$, la fonction affine $x \longmapsto ax + b$ s'écrit $x \longmapsto ax$; c'est donc une fonction linéaire. On peut donc dire qu'une fonction linéaire est une fonction affine particulière ;

si $a = 0$, la fonction affine $x \longmapsto 0x + b$ est une **fonction constante** : $x \longmapsto b$. L'image de tout nombre x par cette fonction est b .

2- Questions classiques :

Question 1 :

Déterminer les images de $4, \frac{2}{3}$ et $-2,4$ par la fonction affine $x \longmapsto 5x + 2$.

Pour $x = 4$, on a $x \longmapsto 5 \times 4 + 2$, soit $4 \longmapsto 22$; l'image de 4 est 22 .

Pour $x = \frac{2}{3}$, on a $\frac{2}{3} \longmapsto 5 \times \frac{2}{3} + 2$, soit $\frac{2}{3} \longmapsto \frac{16}{3}$; l'image de $\frac{2}{3}$ est $\frac{16}{3}$.

Pour $x = -2,4$, on a $-2,4 \longmapsto 5 \times (-2,4) + 2,4$, soit $-2,4 \longmapsto -10$; l'image de $-2,4$ est -10 .

Question 2 :

Parmi les fonctions suivantes, dire lesquelles sont affines et préciser alors les valeurs de a et de b si ces fonctions affines sont notées sous la forme $x \longmapsto ax + b$.

$x \longmapsto -6x - 2$; $x \longmapsto 3x^2 + 8$; $x \longmapsto 12x$; $x \longmapsto \frac{x}{7} - 5,2$; $x \longmapsto \frac{-5}{6}x^2 + 5x$.

La fonction $x \longmapsto -6x - 2$ est affine : $a = -6$ et $b = -2$.

La fonction $x \mapsto 12x$ est affine : $a = 12$ et $b = 0$. Cette fonction est aussi linéaire.

La fonction $x \mapsto \frac{x}{7} - 5,2$ est affine : $a = 0$ et $b = -5,2$.

La fonction $x \mapsto 5,4$ est affine : $a = 0$ et $b = 5,4$. Il s'agit d'une fonction constante.

Les deux autres fonctions ne sont pas affines.

II- Représentation graphique :

On sait que la représentation graphique d'une fonction linéaire (fonction affine particulière) est une droite passant par l'origine du repère.

Qu'en est-il de la représentation graphique d'une fonction affine ?

Exemple 2 :

Représentons graphiquement la fonction affine $x \mapsto 3x + 1$. Soit (O, I, J) un repère du plan ; on choisit une valeur de x que l'on porte en abscisse et on porte en ordonnée l'image correspondant à cette valeur. On obtient ainsi un point.

Par exemple, si $x = 1$, on a $1 \mapsto 4$; on obtient le point de coordonnées $(1 ; 4)$.

Il est commode d'utiliser un tableau comme celui qui est présenté ci-dessous, pour lequel on a choisi arbitrairement quelques valeurs de x .

| Nom du point | A | B | C | D |
|---------------------|---|----|---|---|
| Abscisse | 1 | -1 | 2 | 0 |
| Ordonnée : $3x + 1$ | 4 | -2 | 7 | 1 |

En plaçant ces points, on obtient le graphique de la figure 1.

On constate que les points A, B, C et D sont alignés. Nous admettrons que tous les autres points que l'on aurait pu placer seraient aussi alignés sur cette même droite : on dit que cette droite est la représentation graphique de la fonction affine $x \mapsto 3x + 1$.

3- Propriété :

La représentation graphique d'une fonction affine est une droite.

On dit que la représentation graphique de la fonction affine $x \mapsto ax + b$ est la droite d'équation $y = ax + b$; a est appelé le **coefficient directeur** de la droite et b est appelé **l'ordonnée à l'origine** de la droite.

L'ordonnée à l'origine est l'ordonnée du point où la droite d'équation $y = ax + b$ coupe l'axe des ordonnées.

En effet, pour $x = 0$, on obtient $y = a \times 0 + b$, soit $y = b$; cela correspond au point de coordonnées $(0 ; b)$ sur le graphique, comme le montre la **figure 2**.

Exemple : la représentation graphique de la fonction affine $x \mapsto 3x + 1$ est la droite d'équation $y = 3x + 1$.

Cette droite a pour coefficient directeur **3** et pour ordonnée à l'origine **1**.

Remarque :

Dans le cas particulier où $b = 0$, la fonction affine $x \mapsto ax + b$ est la fonction linéaire $x \mapsto ax$; on retrouve ainsi la propriété selon laquelle la représentation graphique de la fonction linéaire $x \mapsto ax$ est une droite de coefficient directeur a passant par l'origine du repère (l'ordonnée à l'origine est égale à 0).

4- Méthode de construction :

Sachant que toute fonction affine est représentée graphiquement par une droite, il suffit de déterminer **deux** points de cette droite pour pouvoir la tracer.

Puisqu'on sait que la droite d'équation $y = ax + b$ passe par le point de coordonnées $(0 ; b)$, on peut se contenter de déterminer un seul autre point.

5- Interprétation :

Propriété : soit f la fonction affine $x \mapsto ax + b$. Pour tous nombres y et z ($y \neq z$), on a :

$$\frac{f(z) - f(y)}{z - y} = a.$$

Nous allons interpréter graphiquement cette propriété à l'aide de l'exemple suivant. Considérons la fonction affine $x \mapsto 2x - 1$.

Dressons un tableau donnant les images de quelques nombres par f et les noms des points correspondants sur la droite qui représente f graphiquement :

| Point | A | B | C | D |
|-------------------|----|----|---|---|
| Abscisse : x | -2 | 0 | 1 | 4 |
| Ordonnée : $f(x)$ | -5 | -1 | 1 | 7 |

Choisissons deux valeurs y et z de x , par exemple $y = -2$ et $z = 0$, et calculons le rapport $f(z) - f(y)$

$$\text{On a } \frac{f(0) - f(-2)}{0 - (-2)} = \frac{-1 - (-5)}{2} = \frac{4}{2} = 2.$$

Graphiquement, $0 - (-2)$ correspond à l'accroissement de l'abscisse quand on passe du point A au point B, et $f(0) - f(-2)$ correspond à l'accroissement de l'ordonnée quand on passe du point A au point B.

$$\text{Choisissons maintenant } y = 1 \text{ et } z = 4 ; \text{ on a alors } \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{7 - 1}{3} = \frac{6}{3} = 2.$$

On a vérifié que ce rapport est égal à 2, qui est le coefficient directeur de la droite d'équation $y = 2x - 1$, représentation graphique de f .

On peut visualiser cette propriété du coefficient directeur sur la figure 3.

III- Détermination :

Quels sont les éléments dont on doit disposer pour déterminer une fonction affine ?

1- Détermination par calcul :

On sait qu'une fonction affine est une fonction du type $x \mapsto ax + b$, où a et b sont des nombres fixés. Une fonction affine est donc déterminée par la connaissance des deux nombres a et b .

Appuyons-nous sur un exemple : il s'agit de déterminer la fonction affine telle que $4 \mapsto 5$ et $2 \mapsto 1$.

Toute application affine est de la forme $x \mapsto ax + b$. Calculons a et b .

Pour cela, on écrit que pour $x = 4$, on obtient l'équation : $4a + b = 5$.

En identifiant les écritures $4 \mapsto ax + b$ et $4 \mapsto 5$, on obtient l'équation : $4a + b = 5$.

Pour $x = 2$, on obtient : $2 \rightarrow a \times 2 + b$ et $2 \rightarrow -1$.

En identifiant les écritures $2 \rightarrow a \times 2 + b$ et $2 \rightarrow -1$, on obtient l'équation : $2a + b = -1$.

On doit donc résoudre un système de deux équations dont les inconnues sont a et b :

$$4a + b = 5$$

$$2a + b = -1$$

Résolvons ce système par substitution ; on obtient successivement :

$$b = 5 - 4a$$

$$2a + (5 - 4a) = -1;$$

$$b = 5 - 4a$$

$$-2a = -1 - 5;$$

$$b = 5 - 4a$$

$$a = 3 \quad ;$$

$$b = 5 - 4 \times 3$$

$$a = 3 ;$$

$$b = -7$$

$$a = 3.$$

La fonction affine cherchée est donc : $x \rightarrow 3x - 7$.

2- Autres situations :

Exemple 1 :

On verse de l'eau dans une éprouvette graduée jusqu'à atteindre la hauteur de **11 cm**. Chaque jour, on constate que le niveau de l'eau baisse de **4 mm** à cause de l'évaporation.

On veut démontrer que la fonction qui au nombre x de jours écoulés fait correspondre la hauteur (en cm) de l'eau dans l'éprouvette est une fonction affine et déterminer celle-ci.

Au bout de x jours, la hauteur de l'eau a baissé de **4x mm**, soit **0,4x cm**. Au bout de x jours, la hauteur de l'eau (en cm) dans l'éprouvette sera donc égale à : **11 - 0,4x**, soit **-0,4x + 11**.

Par conséquent, la fonction qui au nombre x de jours écoulés fait correspondre la hauteur en cm de l'eau dans l'éprouvette est la fonction affine : $x \rightarrow -0,4x + 11$.

Exemple 2 :

Un automobiliste part d'une **ville A** pour se rendre à une **ville B**, distante de A de **750 km**. Il roule à la vitesse constante de **90 km/h**.

On veut démontrer que la fonction qui à la durée du parcours (en **h**) fait correspondre la distance (en **km**) qui sépare l'automobiliste de la **ville B** est une fonction affine et la déterminer.

Appelons **x** la durée du parcours en heures. Au bout de **x** heures, l'automobiliste a parcouru **90x km**.

La distance (en **km**) séparant l'automobiliste de la **ville B** est donc égale à : **750 - 90x**, soit **-90x + 750**.

Par conséquent, la fonction qui à la durée **x** du parcours (en **h**) fait correspondre la distance (en **km**) qui sépare l'automobiliste de la **ville B** est la fonction affine : **x ---> -90x + 750**.